วิชาสามัญ คณิตศาสตร์ 1 (มี.ค. 61)

วันอาทิตย์ที่ 18 มีนาคม 2561 เวลา 8.30 - 10.00 น.

ตอนที่ 1 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกที่สุด จำนวน 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน

1. ให้ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง
ถ้ากราฟของ $y = f(x)$ ตัดแกน x ที่จุด $(-3, 0)$, $(0, 0)$ และ $(2, 0)$ แล้ว $f(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. -6 2. -1 3. 1 4. 4 5. 6

2. ให้ $i^2 = -1$ ค่าของ $i^{101} + i^{101!}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. -2 2. 2 3. $1 + i$ 4. $1 - i$ 5. $2i$

3. ให้ $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ เวกเตอร์ $\vec{v}$ ในข้อใดต่อไปนี้สอดคล้องกับสมการ $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
1. $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ 2. $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ 3. $\vec{v} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$
4. $\vec{v} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ 5. $\vec{v} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$

4. ถ้า $\arccos(9x^2) + \arcsin(6x - 1) = \frac{\pi}{2}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. $\frac{1}{12}$ 3. $\frac{1}{8}$ 4. $\frac{1}{4}$ 5. $\frac{1}{3}$

5. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(AB^{-1})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -98 2. $\frac{1}{2}$ 3. 1 4. 2 5. 98

6. $\frac{1}{\log_2 100} + \frac{1}{\log_5 100}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{100}$ 2. $\frac{1}{10}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{1}{4}$ 5. $\frac{1}{2}$

7. ในกลุ่มคน 10 คน มีอยู่ 60% ที่มีเลือดกรุ๊ป A ถ้าสุ่มมา 2 คน พร้อมกันจากกลุ่ม แล้วความน่าจะเป็นที่ทั้งสองคนนี้ไม่มีเลือดกรุ๊ป A ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{15}$ 2. $\frac{3}{15}$ 3. $\frac{5}{15}$ 4. $\frac{8}{15}$ 5. $\frac{10}{15}$

8. กำหนดแผนภาพต้นใบ ของข้อมูลชุดหนึ่ง ดังนี้

4	2	4	5	6			
5	1	1	2	3	5	8	
6	0	0	0	2	3	4	x
7	0	1	1	2			
8	1	2	3				

ถ้าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 70 มีค่าเท่ากับ 69 แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5 2. 6 3. 7 4. 8 5. 9

9. สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{6}{x+1}$ ที่จุด $(1, 3)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $x + y = 4$ 2. $3x - 2y = -3$ 3. $3x + 2y = 9$
4. $2x - 3y = -7$ 5. $2x + 3y = 11$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos^n\left(\frac{\pi}{3}+n\pi\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. 2 4. $1+\sqrt{3}$ 5. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

ตอนที่ 2 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกที่สุด จำนวน 20 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน รวม 80 คะแนน

11. จำนวนเต็ม x ที่สอดคล้องกับอสมการ $|2x^2+1|-|-x^2+2x-1| \leq 15$ มีทั้งหมดกี่จำนวน

1. 7 2. 9 3. 11 4. 13 5. 15

12. ให้ S เป็นเซตจำนวนเต็มบวก n โดยที่ $n<100$ และ n มีตัวหารเป็นจำนวนเต็มบวก 12 จำนวน
ถ้า n_1 คือจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดใน S ถ้า n_2 คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดใน S
แล้ว n_2-n_1 มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 12 2. 20 3. 36 4. 38 5. 40

13. ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการ $|z^2 - 1| = iz + 3$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. $3 - i$ 3. $-i$ 4. i 5. $3 + i$

14. ให้ r และ s เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $P(2, 2)$ เป็นจุดบนวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{(x+2)^2}{r^2} + \frac{(y-2)^2}{s^2} = 1$ ซึ่งมีจุด F_1 และ F_2 เป็นโฟกัสของวงรี และ $PF_1 + PF_2 = 12$ แล้วระยะห่างระหว่าง F_1 และ F_2 ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 หน่วย 2. 5 หน่วย 3. $2\sqrt{5}$ หน่วย
4. $5\sqrt{2}$ หน่วย 5. $4\sqrt{5}$ หน่วย

15. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

ก. $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$

ข. $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$

และ ค. $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 3|\vec{u} \times \vec{v}|^2$

ถ้า θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ แล้ว $\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{2}{3}$

16. เซตของจำนวนเต็มสามจำนวนในข้อใดต่อไปนี้ ที่เป็นความยาวด้านของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านได้

1. $\{1, 2, 3\}$
2. $\{2, 3, 4\}$
3. $\{3, 4, 5\}$
4. $\{4, 5, 6\}$
5. $\{5, 6, 7\}$

17. ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์การคูณมิติ 3×3
ถ้า $AB^t = I$ แล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $AB^t = B^tA$
ข. $A^{-1} = B^t$
ค. $B^{-1} = A^t$
ง. $(AB)^{-1} = (BA)^t$

จำนวนข้อความที่ถูกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก)
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

18. ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก ที่สอดคล้องกับสมการ $6^{\frac{1}{x}} = (12 \cdot 3^y)^{\frac{1}{x+2}}$
แล้ว $x + y$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. 3
3. 5
4. 6
5. 8

19. ผลบวกของคำตอบของสมการ $\log_2(\log_2(7x-10)\cdot\log_x 16) = 3$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 9 3. 10 4. 12 5. 16

20. ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{50}$ เป็นลำดับเลขคณิต ถ้า $a_1 = 5$ และ $a_{50} = 103$ แล้ว ${a_1}^2 - {a_2}^2 + {a_3}^2 - {a_4}^2 + \ldots + {a_{49}}^2 - {a_{50}}^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-5{,}400$ 2. $-5{,}000$ 3. 108 4. $5{,}000$ 5. $5{,}400$

21. ให้ $f(x) = \begin{cases} 4x-8 & \text{เมื่อ } x < 2 \\ x^2-4 & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$ และ $g(x) = [f(x)]^2$ ถ้า $g'(c) = -8$ แล้ว c มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 2. $-\frac{5}{4}$ 3. 1 4. $\frac{7}{4}$ 5. 2

22. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันกำลังสอง โดยที่กราฟของ $y = f(x)$ มีจุดต่ำสุดที่ $(0, -9)$ และตัดแกน x ที่จุด $(x_1, 0)$ และ $(x_2, 0)$ ถ้าพื้นที่ซึ่งปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = f(x)$ และแกน x จาก x_1 ถึง x_2 เท่ากับ 18 ตารางหน่วย แล้ว $f(2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -5 2. -3 3. 0 4. 3 5. 7

23. คะแนนสอบคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ มีการแจกแจงปกติ

โดยที่ คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต เท่ากับ 60 คะแนน
และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 8 คะแนน
คะแนนสอบวิชาวิทยาศาสตร์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต เท่ากับ 65 คะแนน
และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6 คะแนน

ถ้านายมนัส มีคะแนนมาตรฐานของคะแนนสอบทั้งสองวิชาเท่ากัน แต่คะแนนสอบวิชาวิทยาศาสตร์มากกว่าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์อยู่ 2 คะแนน แล้วมนัสสอบได้คะแนนวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 72 คะแนน 2. 74 คะแนน 3. 76 คะแนน
4. 83 คะแนน 5. 86 คะแนน

24. เมื่อสร้างตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบของนักเรียนจำนวน 48 คน โดยให้ความกว้างของแต่ละอันตรภาคชั้นเป็น 10 แล้วพบว่ามัธยฐานอยู่ในช่วง $50 - 59$ ถ้ามีนักเรียนได้คะแนนต่ำกว่า 50 คะแนนอยู่ 20 คน และมีนักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 60 คะแนนขึ้นไปอยู่ 20 คน แล้วมัธยฐานเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 53 คะแนน 2. 53.5 คะแนน 3. 54 คะแนน
4. 54.5 คะแนน 5. 55 คะแนน

25. ให้ $S = \{-10, -9, -8, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 8, 9, 10\}$ สุ่มหยิบคู่อันดับ $(a, b) \in S \times S$ มา 1 คู่อันดับ ความน่าจะเป็นที่ $|a| + b = 0$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{10}{441}$ 2. $\frac{20}{441}$ 3. $\frac{1}{21}$ 4. $\frac{1}{20}$ 5. $\frac{1}{10}$

26. ข้อมูล 20 จำนวน เรียงจากน้อยไปมากได้เป็น $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20}$ โดยมีฐานนิยมมีค่าไม่เท่ากับ x_1, ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ $\bar{x}$, มัธยฐานเท่ากับ m และพิสัยเท่ากับ R ถ้าตัด x_1 ออกจะได้ข้อมูลชุดใหม่คือ $x_2, x_3, \ldots, x_{20}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ฐานนิยมของข้อมูลชุดใหม่ เท่ากับ ฐานนิยมของข้อมูลชุดเก่า

ข. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดใหม่ มากกว่าหรือเท่ากับ $\bar{x}$

ค. มัธยฐานของข้อมูลชุดใหม่ มากกว่าหรือเท่ากับ m

ง. พิสัยของข้อมูลชุดใหม่ มากกว่า R

จำนวนข้อความที่ถูกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) 2. 1 3. 2
4. 3 5. 4

27. ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{51}$ เป็นข้อมูลในลำดับเรขาคณิต โดยมี $a_1 = 1$ และอัตราส่วนร่วมของลำดับเท่ากับ $-\frac{5}{4}$ แล้วมัธยฐานเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\left(-\frac{5}{4}\right)^{25}$ 2. $\left(-\frac{5}{4}\right)^{23}$ 3. $-\frac{5}{4}$ 4. 1 5. $\left(\frac{5}{4}\right)^{26}$

28. ถ้าสมการ $y = f(x)$ มีกราฟเป็นพาราโบลาซึ่งผ่านจุด $(0, \frac{1}{2})$ และ $-(x-1)^2 + 1 \leq f(x) \leq 1$ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง x แล้วพาราโบลา $y = f(x)$ ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-1, 0)$
2. $(-1, -1)$
3. $(-2, 0)$
4. $(-2, -2)$
5. $(3, -2)$

29. ให้ $S = \{ -5 , -4 , -3 , -2 , -1 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in S \right\}$

ถ้าสุ่มหยิบ 1 เมทริกซ์จากเซต M แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ B ซึ่ง $\det(A + B) = \det A + \det B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{100}$
2. $\frac{3}{100}$
3. $\frac{1}{20}$
4. $\frac{1}{10}$
5. $\frac{11}{100}$

30. ถ้า $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี $a_1 = \frac{\pi}{12}$ และ $d = \frac{\pi}{3}$

แล้ว $\sum_{n=1}^{65} \sin(a_n)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\sqrt{2}$
2. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
3. 0
4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
5. $\sqrt{2}$

เฉลย

1. 5	7. 1	13. 3	19. 1	25. 3
2. 3	8. 4	14. 5	20. 1	26. 4
3. 3	9. 3	15. 1	21. 4	27. 4
4. 5	10. 2	16. 2	22. 5	28. 2
5. 2	11. 2	17. 5	23. 1	29. 4
6. 5	12. 3	18. 2	24. 4	30. 4

แนวคิด

1. ให้ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง
ถ้ากราฟของ $y = f(x)$ ตัดแกน x ที่จุด $(-3, 0)$, $(0, 0)$ และ $(2, 0)$ แล้ว $f(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. -6 2. -1 3. 1 4. 4 5. 6

ตอบ 5

ตัดแกน x ที่จุด $(-3, 0)$, $(0, 0)$ และ $(2, 0)$ แสดงว่า $f(-3) = 0$, $f(0) = 0$ และ $f(2) = 0$
จะได้ว่า -3 , 0 และ 2 เป็นคำตอบของสมการ $f(x) = 0$
เนื่องจาก $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ เป็นพหุนามดีกรี $3 \rightarrow$ สร้างสมการจากคำตอบ -3 , 0 และ 2 จะได้
สมการคือ $k(x + 3)(x - 0)(x - 2) = 0$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่อะไรก็ได้
จะได้ $f(x) = k(x + 3)(x - 0)(x - 2)$
เนื่องจาก สปส ของ x^3 ใน $f(x)$ เท่ากับ 1 จึงสรุปได้ว่า $k = 1$ ทำให้ได้ว่า $f(x) = (x + 3)(x - 0)(x - 2)$
แทน $x = -1$ จะได้ $f(-1) = (-1 + 3)(-1 - 0)(-1 - 2) = 6$

2. ให้ $i^2 = -1$ ค่าของ $i^{101} + i^{101!}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. -2 2. 2 3. $1 + i$ 4. $1 - i$ 5. $2i$

ตอบ 3

i^n จะวนซ้ำทุกๆ 4 ตัว คือ $i^n = \begin{cases} \text{i} & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย 4 เหลือเศษ 1} \\ -1 & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย 4 เหลือเศษ 2} \\ -\text{i} & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย 4 เหลือเศษ 3} \\ 1 & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย 4 ลงตัว} \end{cases}$
101 หารด้วย 4 เหลือเศษ 1 ดังนั้น $i^{101} = i$
$101! = 101 \times 100 \times 99 \times \ldots \times 4 \times \ldots \times 1$ จะหารด้วย 4 ลงตัว ดังนั้น $i^{101!} = 1$
ดังนั้น $i^{101} + i^{101!} = i + 1$

3. ให้ $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ เวกเตอร์ $\vec{v}$ ในข้อใดต่อไปนี้สอดคล้องกับสมการ $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
1. $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ 2. $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ 3. $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$
4. $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ 5. $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

ตอบ 3

$\vec{u} \times \vec{v}$ จะเป็น $\vec{0}$ เมื่อ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ขนานกัน ซึ่งจะขนานกันเมื่อ $\vec{v} = k\vec{u}$ สำหรับ k บางค่า
จะเห็นว่าข้อ 3. $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = -(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -\vec{u} \rightarrow$ ขนาน $\rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
ส่วนข้ออื่น จะเห็นว่า $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ไม่เป็นสัดส่วนกัน จึงไม่ขนาน และ $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$

4. ถ้า $\arccos(9x^2) + \arcsin(6x-1) = \frac{\pi}{2}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. $\frac{1}{12}$ 3. $\frac{1}{8}$ 4. $\frac{1}{4}$ 5. $\frac{1}{3}$

ตอบ 5

จากกฎโคฟังก์ชัน เมื่อ $A+B=\frac{\pi}{2}$ จะได้ $\cos A = \sin B$

ดังนั้น ถ้า $\arccos(9x^2) + \arcsin(6x-1) = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\cos(\arccos(9x^2)) = \sin(\arcsin(6x-1))$

$$\begin{aligned} 9x^2 &= 6x-1 \\ 9x^2-6x+1 &= 0 \\ (3x-1)^2 &= 0 \\ x &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

ลองแทน $x=\frac{1}{3}$ จะเห็นว่า $9x^2 = 9\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$

และ $6x-1 = 6\left(\frac{1}{3}\right)-1 = 1$

} อยู่ในโดเมน $\arccos$, $\arcsin$ (คือ $[-1,1]$) ทั้งคู่ → ใช้เป็นคำตอบได้

5. ถ้า $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ -2 & 2\end{bmatrix}$ แล้ว $\det(AB^{-1})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -98 2. $\frac{1}{2}$ 3. 1 4. 2 5. 98

ตอบ 2

det กระจายในการคูณ และอินเวอร์สได้ → $\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B)^{-1}$

$$= \frac{\det(A)}{\det(B)}$$

$$= \frac{(2)(5)-(3)(1)}{(4)(2)-(-2)(3)} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

6. $\frac{1}{\log_2 100} + \frac{1}{\log_5 100}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{100}$ 2. $\frac{1}{10}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{1}{4}$ 5. $\frac{1}{2}$

ตอบ 5

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 100} + \frac{1}{\log_5 100} &= \log_{100} 2 + \log_{100} 5 \\ &= \log_{100}(2\times 5) \\ &= \log_{100} 10 \\ &= \log_{10^2} 10 \\ &= \frac{1}{2}\log_{10} 10 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\log_N M = \frac{1}{\log_M N}$

$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

$\log_{(a^b)}(M^N) = \frac{N}{b}\log_a M$

7. ในกลุ่มคน 10 คน มีอยู่ 60% ที่มีเลือดกรุ๊ป A ถ้าสุ่มมา 2 คน พร้อมกันจากกลุ่ม แล้วความน่าจะเป็นที่ทั้งสองคนนี้ไม่มีเลือดกรุ๊ป A ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{15}$ 2. $\frac{3}{15}$ 3. $\frac{5}{15}$ 4. $\frac{8}{15}$ 5. $\frac{10}{15}$

ตอบ 1

หาจำนวนแบบทั้งหมด : มีคน 10 คน สุ่มมา 2 คนพร้อมกัน จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $=\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2}=45$ แบบ

หาจำนวนแบบที่สนใจ : มีกรุ๊ป A อยู่ 60% จะคิดเป็น $\frac{60}{100}\times 10 = 6$ คน → มีคนที่ไม่ใช่กรุ๊ป A อยู่ $10-6=4$ คน

สุ่มมา 2 คน จะได้จำนวนแบบที่ทั้งสองคนไม่ใช่กรุ๊ป A $=\binom{4}{2}=\frac{4\times 3}{2}=6$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

8. กำหนดแผนภาพต้นใบ ของข้อมูลชุดหนึ่ง ดังนี้

4	2	4	5	6			
5	1	1	2	3	5	8	
6	0	0	0	2	3	4	x
7	0	1	1	2			
8	1	2	3				

ถ้าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 70 มีค่าเท่ากับ 69 แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5 2. 6 3. 7 4. 8 5. 9

<u>ตอบ</u> 4

จำนวนข้อมูลทั้งหมด $=$ จำนวนตัวเลขทางฝั่งขวา $= 24$ จำนวน

จะได้เปอร์เซ็นไทล์ที่ 70 อยู่ตำแหน่งที่ $\frac{70}{100}\cdot(N+1) = \frac{70}{100}\cdot(24+1) = 17.5$

จะได้ $P_{70} = \frac{\text{ตัวที่ } 17 + \text{ตัวที่ } 18}{2}$ → นับหาตัวที่ 17 และตัวที่ 18 จะได้ดังรูป

6	0	0	0	2	3	4	x
7	0	1	1	2			

ตัวที่ 18 หลักสิบคือ 7 หลักหน่วยคือ 0 คิดเป็นค่า $= 70$

ตัวที่ 17 หลักสิบคือ 6 หลักหน่วยคือ x คิดเป็นค่า $= 60 + x$

ดังนั้น $P_{70} = \frac{(60+x)+70}{2}$

$69 = \frac{130+x}{2}$

$8 = x$

9. สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{6}{x+1}$ ที่จุด $(1,3)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $x + y = 4$ 2. $3x - 2y = -3$ 3. $3x + 2y = 9$
4. $2x - 3y = -7$ 5. $2x + 3y = 11$

<u>ตอบ</u> 3

หาความชันที่จุด $(1,3)\rightarrow$ ต้องหา y' :

$$y = \frac{6}{x+1} = 6(x+1)^{-1}$$
$$y' = (-1)6(x+1)^{-2}\cdot\frac{d}{dx}(x+1)$$
$$= -6(x+1)^{-2}$$

ที่จุด $(1,3)\rightarrow$ แทน $x=1$ จะได้ $y' = -6(1+1)^{-2} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

จะได้สมการเส้นตรงที่ผ่าน $(1,3)$ และมีความชัน $-\frac{3}{2}$

คือ $\frac{y-3}{x-1} = -\frac{3}{2}$

$2y - 6 = -3x + 3$

$3x + 2y = 9$

> สมการกราฟเส้นตรงที่ผ่านจุด (a,b) และมีความชัน $= m$ คือ $\frac{y-b}{x-a} = m$

10. $\sum_{n=0}^{\infty}\cos^n\left(\frac{\pi}{3}+n\pi\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. 2 4. $1+\sqrt{3}$ 5. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

<u>ตอบ</u> 2

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos^n\left(\frac{\pi}{3}+n\pi\right) = \cos^0\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos^1\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)+\cos^3\left(\frac{\pi}{3}+3\pi\right)+\ldots$$
$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots$$

เป็นอนุกรมอนันต์ ที่มี $a_1 = 1$ และ $r = -\frac{1}{2}$ → จะได้ผลบวก $= \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$

11. จำนวนเต็ม x ที่สอดคล้องกับอสมการ $|2x^2+1|-|-x^2+2x-1| \le 15$ มีทั้งหมดกี่จำนวน

1. 7 2. 9 3. 11 4. 13 5. 15

ตอบ 2

ถ้ารู้เครื่องหมายของตัวที่อยู่ในค่าสัมบูรณ์ จะถอดค่าสัมบูรณ์ได้ด้วยสมบัติ $|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \ge 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$

(หมายเหตุ : เมื่อ $a = 0$ จะใช้ a หรือ $-a$ ก็ได้ เพราะเป็น 0 เหมือนกัน)

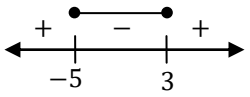
เนื่องจาก $x^2 \ge 0$ เสมอ ดังนั้น $2x^2+1$ เป็นบวกเสมอ ดังนั้น $|2x^2+1| = 2x^2+1$

และ $-x^2+2x-1 = -(x^2-2x+1) = = \underbrace{-(x-1)^2}_{\text{ผลกำลังสอง} \ge 0 \text{ เสมอ}}$ จะเป็นลบหรือศูนย์เสมอ

ดังนั้น $|-x^2+2x-1| = -(-x^2+2x-1) = x^2-2x+1$

แทนในอสมการโจทย์จะได้

$$\begin{aligned} |2x^2+1|-|-x^2+2x-1| &\le 15 \\ (2x^2+1)-(x^2-2x+1) &\le 15 \\ 2x^2+1-x^2+2x-1 &\le 15 \\ x^2+2x-15 &\le 0 \\ (x+5)(x-3) &\le 0 \quad \rightarrow \end{aligned}$$



จะได้จำนวนเต็มในช่วง $[-5, 3]$ จะมี $3-(-5)+1 = 9$ จำนวน

12. ให้ S เป็นเซตจำนวนเต็มบวก n โดยที่ $n < 100$ และ n มีตัวหารเป็นจำนวนเต็มบวก 12 จำนวน

ถ้า n_1 คือจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดใน S ถ้า n_2 คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดใน S

แล้ว $n_2 - n_1$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 12 2. 20 3. 36 4. 38 5. 40

ตอบ 3

จำนวนตัวหารที่เป็นบวกของ n จะหาได้โดยการแยกตัวประกอบ แล้วเอา "เลขชี้กำลัง $+1$" มาคูณกัน

(เช่น $48 = 2^4 \times 3^1$ จะได้จำนวนตัวหารที่เป็นบวกของ 48 คือ $(4+1)(1+1) = 10$ จำนวน)

ถ้า n มีตัวหารที่เป็นบวก 12 จำนวน $\rightarrow$ ต้องดูว่า 12 มาจากการคูณกันของ "เลขชี้กำลัง $+1$" ได้กี่แบบ

12 จะเขียนเป็นผลคูณได้ 4 แบบ คือ $\underset{\downarrow}{12}$, $\underset{\downarrow}{2\times 6}$, $\underset{\downarrow}{3\times 4}$ และ $\underset{\downarrow}{2\times 2\times 3}$

$11+1$ $(1+1)(5+1)$ $(2+1)(3+1)$ $(1+1)(1+1)(2+1)$

ดังนั้น n ต้องอยู่ในรูป p^{11} , p^1q^5 , p^2q^3 หรือ $p^1q^1r^2$ เมื่อ p, q, r เป็นจำนวนเฉพาะ

หา n ที่น้อยที่สุด $\rightarrow$ ต้องเลือกให้เลขชี้กำลังน้อยๆ (ได้แก่ $p^1q^1r^2$) และเลือกให้จำนวนเฉพาะน้อยๆ ยกกำลังเยอะๆ

จะได้ n ที่น้อยที่สุด คือ $n_1 = 3^1 5^1 2^2 = 60$

หา n ที่มากที่สุด $\rightarrow$ จะยากหน่อย เพราะต้องมากสุด แต่น้อยกว่า 100

p^{11} เกิน 100 แน่นอน

p^1q^5 จะน้อยกว่า 100 ได้แบบเดียว คือ $3^1 2^5 = 96$

และจะเห็นว่า $97, 98, 99$ แยกตัวประกอบแล้วไม่อยู่ในรูป p^2q^3 หรือ $p^1q^1r^2$

ดังนั้น จะได้ n ที่มากที่สุด คือ $n_2 = 96$

จะได้ $n_2 - n_1 = 96-60 = 36$

13. ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการ $|z^2-1| = iz+3$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. $3-i$ 3. $-i$ 4. i 5. $3+i$

ตอบ 3

ฝั่งซ้ายของสมการ $|z^2-1|$ คือ "ขนาด" ของจำนวนเชิงซ้อน → ขนาด จะเป็นจำนวนจริงเสมอ

ดังนั้นฝั่งขวา $iz+3$ ต้องเป็นจำนวนจริงด้วย → iz ต้องเป็นจำนวนจริง

ดังนั้น z ต้องเป็นจำนวนจินตภาพแท้ ($z = ki$) ถึงจะคูณ i แล้วกลายเป็นจำนวนจริง

แทน $z=ki$ ในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} |z^2-1| &= iz+3 \\ |(ki)^2-1| &= i(ki)+3 \\ |-k^2-1| &= -k+3 \\ -(-k^2-1) &= -k+3 \\ k^2+k-2 &= 0 \\ (k+2)(k-1) &= 0 \\ k &= -2,\ 1 \end{aligned}$$

เมื่อ a เป็นจำนวนจริงลบ จะได้ $|a| = -a$

จะได้ $z=-2i$ และ $1i$ → ผลบวกของ z ทั้งหมด $= -2i+1i = -i$

14. ให้ r และ s เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $P(2,2)$ เป็นจุดบนวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{(x+2)^2}{r^2}+\frac{(y-2)^2}{s^2}=1$ ซึ่งมีจุด F_1 และ F_2 เป็นโฟกัสของวงรี และ $PF_1+PF_2 = 12$ แล้วระยะห่างระหว่าง F_1 และ F_2 ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 หน่วย 2. 5 หน่วย 3. $2\sqrt{5}$ หน่วย
4. $5\sqrt{2}$ หน่วย 5. $4\sqrt{5}$ หน่วย

ตอบ 5

$P(2,2)$ อยู่บนวงรี → ต้องแทนในสมการวงรีแล้วเป็นจริง

$$\begin{aligned} \frac{(2+2)^2}{r^2}+\frac{(2-2)^2}{s^2} &= 1 \\ \frac{4^2}{r^2}+0 &= 1 \\ 4 &= r \end{aligned}$$

จาก $PF_1+PF_2 = 12$ → จะได้ความยาวแกนเอก $= 12$

ถ้าเป็นวงรีแนวนอน จะได้ความยาวแกนเอก $= 2r = 2(4) = 8 \neq 12$ → ขัดแย้ง

ดังนั้น ต้องเป็นวงรีแนวตั้ง ซึ่งจะได้ความยาวแกนเอก $= 2s$ และจะสรุปได้ว่า $2s = 12$

$$s = 6$$

จะได้ระยะโฟกัส $c = \sqrt{s^2-r^2} = \sqrt{6^2-4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

จะได้ระยะระหว่าง F_1 และ $F_2 = 2c = 2(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$

15. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

ก. $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$

ข. $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$

และ ค. $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 3|\vec{u} \times \vec{v}|^2$

ถ้า θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ แล้ว $\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{2}{3}$

<u>ตอบ</u> 1

จาก ค. $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 3|\vec{u} \times \vec{v}|^2$

$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 3|\vec{u} \times \vec{v}|^2$

$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = 3(|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta)^2$ ↷ จาก ข.

$1 + 1 + 2\cos\theta = 3\sin^2\theta$

$2 + 2\cos\theta = 3(1 - \cos^2\theta)$

$3\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0$

$(3\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$

$\cos\theta = \frac{1}{3}, -1$

แต่จาก ก. จะได้ $\theta \neq 0°, 180°$ ทำให้ $\cos\theta = -1$ ไม่ได้ → เหลือคำตอบเดียว คือ $\frac{1}{3}$

16. เซตของจำนวนเต็มสามจำนวนในข้อใดต่อไปนี้ ที่เป็นความยาวด้านของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านได้

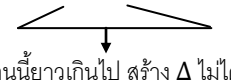
1. $\{1, 2, 3\}$ 2. $\{2, 3, 4\}$ 3. $\{3, 4, 5\}$

4. $\{4, 5, 6\}$ 5. $\{5, 6, 7\}$

<u>ตอบ</u> 2

จะ “เป็น Δ” ได้ ด้านที่ยาวที่สุด ต้องไม่ยาวเกินไป

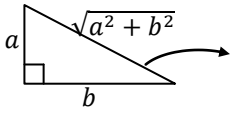
คือ ต้อง “สั้นกว่า” อีกสองด้านรวมกัน ไม่งั้นอีกสองด้านจะบรรจบกันไม่ถึง



ด้านนี้ยาวเกินไป สร้าง Δ ไม่ได้

จะเห็นว่าข้อ 1. ด้านที่ยาวที่สุด คือ 3 ยาวเท่ากับอีกสองด้านรวมกันพอดี $1 + 2 \rightarrow$ ไม่ได้สั้นกว่า จะไม่เป็น Δ

และจะ “เป็น Δ มุมป้าน” ได้ ด้านที่ยาวที่สุด ต้องยาวกว่า “ด้านตรงข้ามมุมฉากของ Δ มุมฉาก”



เป็น Δ มุมป้าน เมื่อด้านนี้ยาวกว่า $\sqrt{a^2+b^2}$

นั่นคือ จะเป็น Δ มุมป้าน เมื่อ $c > \sqrt{a^2+b^2}$

$c^2 > a^2 + b^2$

2. $4^2 > 2^2 + 3^2$ ✓ 3. $5^2 > 3^2 + 4^2$ ×

4. $6^2 > 4^2 + 5^2$ × 5. $7^2 > 5^2 + 6^2$ ×

จะเห็นว่ามีข้อ 2 เท่านั้น ที่ $c^2 > a^2 + b^2$

17. ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์การคูณมิติ 3×3

ถ้า $AB^t = I$ แล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $AB^t = B^tA$ ข. $A^{-1} = B^t$

ค. $B^{-1} = A^t$ ง. $(AB)^{-1} = (BA)^t$

จำนวนข้อความที่ถูกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) 2. 1 3. 2

4. 3 5. 4

ตอบ 5

ก. จาก $AB^t = I$ จะได้ว่า A กับ B^t เป็นอินเวอร์สกัน

ซึ่งอินเวอร์สมีสมบัติสลับที่ได้ $\rightarrow AB^t = B^tA = I \rightarrow$ ก. ถูก

ข. จาก A กับ B^t เป็นอินเวอร์สกัน จะได้ $B^t = A^{-1} \rightarrow$ ข. ถูก

ค. จาก
$$\begin{aligned} AB^t &= I \\ (AB^t)^t &= I^t \\ (B^t)^tA^t &= I \\ BA^t &= I \end{aligned}$$
$(XY)^t = Y^tX^t$

$\rightarrow$ จะได้ B กับ A^t เป็นอินเวอร์สกัน $\rightarrow A^t = B^{-1} \rightarrow$ ค. ถูก

ง. จากสมบัติของอินเวอร์ส จะได้
$$\begin{aligned} (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\ &= A^t\ B^t \\ &= (BA)^t \end{aligned}$$
จาก ข. และ ค.

$\rightarrow$ ง. ถูก

18. ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก ที่สอดคล้องกับสมการ $6^{\frac{1}{x}} = (12 \cdot 3^y)^{\frac{1}{x+2}}$

แล้ว $x + y$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 3 3. 5 4. 6 5. 8

ตอบ 2

$$\begin{aligned} 6^{\frac{1}{x}} &= (12 \cdot 3^y)^{\frac{1}{x+2}} \\ \left(6^{\frac{1}{x}}\right)^{x(x+2)} &= \left((12 \cdot 3^y)^{\frac{1}{x+2}}\right)^{x(x+2)} \\ 6^{x+2} &= (12 \cdot 3^y)^x \\ (2 \cdot 3)^{x+2} &= (2^2 \cdot 3^1 \cdot 3^y)^x \\ 2^{x+2} \cdot 3^{x+2} &= 2^{2x} \cdot 3^{(y+1)x} \end{aligned}$$
ยกกำลัง $x(x+2)$ ทั้งสองข้าง เพื่อทำให้เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

เนื่องจากทั้งสองฝั่งเป็นจำนวนเต็ม และจำนวนเต็มหนึ่งๆ จะเขียนเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะได้เพียงแบบเดียว ดังนั้น เลขชี้กำลังของแต่ละจำนวนเฉพาะ ของทั้งสองฝั่งสมการต้องเท่ากัน

$$2^{x+2} \cdot 3^{x+2} = 2^{2x} \cdot 3^{(y+1)x}$$

$$\begin{aligned} x + 2 &= 2x \\ 2 &= x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2 &= (y+1)x \\ 2 + 2 &= (y+1)2 \\ 2 &= y + 1 \\ 1 &= y \end{aligned}$$

จะได้ $x + y = 2 + 1 = 3$

19. ผลบวกของคำตอบของสมการ $\log_2(\log_2(7x-10)\cdot\log_x 16) = 3$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 9 3. 10 4. 12 5. 16

ตอบ 1

$$\begin{aligned}
\log_2(\log_2(7x-10)\cdot\log_x 16) &= 3\\
\log_2(7x-10)\cdot\log_x 16 &= 2^3\\
\frac{\log(7x-10)}{\log 2}\cdot\frac{\log 16}{\log x} &= 8\\
\frac{\log(7x-10)}{\log x}\cdot\frac{\log 16}{\log 2} &= 8\\
\log_x(7x-10)\cdot\log_2 16 &= 8\\
\log_x(7x-10)\cdot 4 &= 8\\
\log_x(7x-10) &= 2\\
7x-10 &= x^2\\
0 &= x^2-7x+10\\
0 &= (x-2)(x-5)\\
x &= 2,\ 5
\end{aligned}$$

คำตอบต้องแทนแล้ว หาค่า log ได้ (หลัง log และ ฐาน เป็นบวก และ ฐาน $\neq 1$)

$x=2$: $\log_2(\log_2(7(2)-10)\cdot\log_2 16)$ → $\log_2(\log_2(2)\cdot 4)$

$x=5$: $\log_2(\log_2(7(5)-10)\cdot\log_5 16)$ → $\log_2(\log_2 25\cdot\log_5 16)$

ใช้ได้ทั้ง 2 คำตอบ → ผลบวก $= 2+5 = 7$

20. ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{50}$ เป็นลำดับเลขคณิต ถ้า $a_1 = 5$ และ $a_{50} = 103$ แล้ว ${a_1}^2 - {a_2}^2 + {a_3}^2 - {a_4}^2 + \ldots + {a_{49}}^2 - {a_{50}}^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-5{,}400$ 2. $-5{,}000$ 3. 108 4. 5,000 5. 5,400

ตอบ 1

จากสูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$ → แทน $n=50$ จะได้ $a_{50} = a_1 + (50-1)d$

$$\begin{aligned}
103 &= 5 + 49d\\
98 &= 49d\\
2 &= d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&{a_1}^2 - {a_2}^2 + {a_3}^2 - {a_4}^2 + \ldots + {a_{49}}^2 - {a_{50}}^2\\
&= (a_1-a_2)(a_1+a_2) + (a_3-a_4)(a_3+a_4) + \ldots + (a_{49}-a_{50})(a_{49}+a_{50})\\
&= -(a_2-a_1)(a_1+a_2) - (a_4-a_3)(a_3+a_4) - \ldots - (a_{50}-a_{49})(a_{49}+a_{50})\\
&= -(d)(a_1+a_2) - (d)(a_3+a_4) - \ldots - (d)(a_{49}+a_{50})\\
&= -d(a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{49}+a_{50})\\
&= -d\left(\frac{50}{2}(a_1+a_{50})\right)\\
&= -2\left(\frac{50}{2}(5+103)\right)\\
&= -5400
\end{aligned}$$

21. ให้ $f(x) = \begin{cases} 4x-8 & \text{เมื่อ } x<2 \\ x^2-4 & \text{เมื่อ } x\geq 2 \end{cases}$ และ $g(x) = [f(x)]^2$

ถ้า $g'(c) = -8$ แล้ว c มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 2. $-\frac{5}{4}$ 3. 1 4. $\frac{7}{4}$ 5. 2

ตอบ 4

จาก $g(x) = [f(x)]^2$ จะได้ $g(x) = \begin{cases} (4x-8)^2 & \text{เมื่อ } x<2 \\ (x^2-4)^2 & \text{เมื่อ } x\geq 2 \end{cases}$

หา $g'(x)$ → ต้องดิฟทั้งสองสูตร

เมื่อ $x<2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(4x-8)^2 &= 2(4x-8)\frac{d}{dx}(4x-8) \\ &= 2(4x-8)\ \ 4 \\ &= 8(4x-8) \end{aligned}$$

เมื่อ $x>2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2-4)^2 &= 2(x^2-4)\frac{d}{dx}(x^2-4) \\ &= 2(x^2-4)\ \ 2x \\ &= 4x(x^2-4) \end{aligned}$$

และตรงรอยต่อ $x=2$ จะได้ฝั่งซ้ายเป็น $8(4(2)-8)=0$ และฝั่งขวา $4(2)(2^2-4)=0$ → เท่ากัน

ดังนั้น $g'(2)$ หาได้ และจะเขียนได้เป็น $g'(x) = \begin{cases} 8(4x-8) & \text{เมื่อ } x<2 \\ 4x(x^2-4) & \text{เมื่อ } x\geq 2 \end{cases}$

โจทย์ให้ $g'(c)=-8$ แต่จะเห็นว่า -8 มาจาก $4x(x^2-4)$ ไม่ได้

เพราะเมื่อ $x\geq 2$ จะได้ $g'(x)\geq 4(2)(2^2-4)\geq 0$ แต่ $-8<0$

ดังนั้น -8 ต้องมาจาก $8(4x-8)$ →

$$\begin{aligned} g'(c) &= 8(4c-8) \\ -8 &= 8(4c-8) \\ -1 &= 4c-8 \\ \tfrac{7}{4} &= c \end{aligned}$$

22. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันกำลังสอง โดยที่กราฟของ $y=f(x)$ มีจุดต่ำสุดที่ $(0,-9)$ และตัดแกน x ที่จุด $(x_1,0)$ และ $(x_2,0)$ ถ้าพื้นที่ซึ่งปิดล้อมด้วยกราฟของ $y=f(x)$ และแกน x จาก x_1 ถึง x_2 เท่ากับ 18 ตารางหน่วย แล้ว $f(2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -5 2. -3 3. 0 4. 3 5. 7

ตอบ 5

จุดต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง คือจุดยอดของพาราโบลาหงายนั่นเอง → จะได้จุดยอดคือ $(h,k)=(0,-9)$

จะได้ $f(x) = a(x-h)^2+k = a(x-0)^2-9 = ax^2-9$

หาจุดตัดแกน x ต้องแทน $y=0$ →

$$\begin{aligned} ax^2-9 &= 0 \\ x^2 &= \frac{9}{a} \\ x &= \pm\frac{3}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

พาราโบลาหงาย → a เป็นบวก

หาพื้นที่ → $\int_{-\frac{3}{\sqrt{a}}}^{\frac{3}{\sqrt{a}}} (ax^2-9)dx = \left(\frac{a}{3}x^3-9x\right)\Big|_{-\frac{3}{\sqrt{a}}}^{\frac{3}{\sqrt{a}}}$

$$= \left[\frac{a}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{a}}\right)^3-9\left(\frac{3}{\sqrt{a}}\right)\right]-\left[\frac{a}{3}\left(-\frac{3}{\sqrt{a}}\right)^3-9\left(-\frac{3}{\sqrt{a}}\right)\right]$$

$$= \frac{9}{\sqrt{a}}-\frac{27}{\sqrt{a}} + \frac{9}{\sqrt{a}} - \frac{27}{\sqrt{a}} = -\frac{36}{\sqrt{a}}$$

โจทย์ให้พื้นที่ $= 18 \rightarrow$ ดังนั้น $\left|-\frac{36}{\sqrt{a}}\right| = 18$

$$\frac{36}{\sqrt{a}} = 18$$
$$2 = \sqrt{a}$$
$$4 = a$$

แทนค่า a ใน $f(x)$ จะได้ $f(x) = 4x^2 - 9$

$$f(2) = 4(2^2) - 9 = 7$$

23. คะแนนสอบคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ มีการแจกแจงปกติ

โดยที่ คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต เท่ากับ 60 คะแนน

และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 8 คะแนน

คะแนนสอบวิชาวิทยาศาสตร์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต เท่ากับ 65 คะแนน

และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6 คะแนน

ถ้านายมนัส มีคะแนนมาตรฐานของคะแนนสอบทั้งสองวิชาเท่ากัน แต่คะแนนสอบวิชาวิทยาศาสตร์มากกว่าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์อยู่ 2 คะแนน แล้วมนัสสอบได้คะแนนวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 72 คะแนน
2. 74 คะแนน
3. 76 คะแนน
4. 83 คะแนน
5. 86 คะแนน

<u>ตอบ</u> 1

สมมติให้คะแนนคณิต เท่ากับ x คะแนน

$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

โจทย์ให้ $\bar{x}_{\text{คณิต}} = 60$ และ $s_{\text{คณิต}} = 8 \rightarrow$ จะได้คะแนนมาตรฐานคณิต $z_{\text{คณิต}} = \frac{x-60}{8}$

ได้วิทย์มากกว่าคณิต 2 คะแนน $\rightarrow$ ได้วิทย์ $x + 2$ คะแนน

โจทย์ให้ $\bar{x}_{\text{วิทย์}} = 65$ และ $s_{\text{วิทย์}} = 6 \rightarrow$ จะได้คะแนนมาตรฐานวิทย์ $z_{\text{วิทย์}} = \frac{x+2-65}{6}$

โจทย์ให้ $z_{\text{คณิต}} = z_{\text{วิทย์}}$ ดังนั้น $\frac{x-60}{8} = \frac{x+2-65}{6}$

$$3x - 180 = 4x - 252$$
$$72 = x$$

24. เมื่อสร้างตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบของนักเรียนจำนวน 48 คน โดยให้ความกว้างของแต่ละอันตรภาคชั้นเป็น 10 แล้วพบว่ามัธยฐานอยู่ในช่วง 50 – 59 ถ้ามีนักเรียนได้คะแนนต่ำกว่า 50 คะแนนอยู่ 20 คน และมีนักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 60 คะแนนขึ้นไปอยู่ 20 คน แล้วมัธยฐานเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 53 คะแนน
2. 53.5 คะแนน
3. 54 คะแนน
4. 54.5 คะแนน
5. 55 คะแนน

<u>ตอบ</u> 4

มัธยฐาน หาได้จากสูตร $L + \frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_m} \cdot I$

โจทย์ให้ความกว้างชั้น $I = 10$ แสดงว่าขอบชั้นขยายออกไปฝั่งละ 0.5 $\rightarrow$ จะได้ขอบล่าง $L = 49.5$

$\sum f_L =$ ผลรวมความถี่ในชั้นต่ำกว่า $\rightarrow$ มี 20 คนได้ต่ำกว่า 50 คะแนน ดังนั้น $\sum f_L = 20$

(ข้อนี้ ต้องสมมติให้คะแนนสอบเป็นจำนวนเต็ม $\rightarrow$ ต่ำว่า 50 ตะแนน คือ ต่ำกว่า 49.5 คะแนน)

$f_m =$ ความถี่ในชั้นมัธยฐาน $\rightarrow$ ทั้งหมด 48 คน มี 20 คนต่ำกว่า 50 คะแนน และมี 20 คนได้ตั้งแต่ 60 คะแนนขึ้นไป

ดังนั้น จะเหลือนักเรียน $48 - 20 - 20 = 8$ คน ได้คะแนนในช่วง 50 – 59 คะแนน $\rightarrow f_m = 8$

แทนในสูตร จะได้ มัธยฐาน $= 49.5 + \frac{\frac{48}{2} - 20}{8} \cdot 10 = 54.5$

25. ให้ $S = \{-10, -9, -8, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 8, 9, 10\}$ สุ่มหยิบคู่อันดับ $(a, b) \in S \times S$ มา 1 คู่อันดับ ความน่าจะเป็นที่ $|a| + b = 0$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{10}{441}$ 2. $\frac{20}{441}$ 3. $\frac{1}{21}$ 4. $\frac{1}{20}$ 5. $\frac{1}{10}$

<u>ตอบ</u> 3

จำนวนแบบทั้งหมด : S มีสมาชิก $10 - (-10) + 1 = 21$ จำนวน $\rightarrow$ เลือก a, b ได้ทั้งหมด 21^2 แบบ

จำนวนแบบที่สนใจ : จะเห็นว่า a เป็นอะไรก็ได้ แต่ต้องเลือก b เป็นจำนวนตรงข้ามกับ $|a|$ (คือ $b = -|a|$)

(สังเกตว่า ถ้า $a \in S$ แล้ว $-|a| \in S$ เสมอ)

เช่น ถ้า $a = -10$ จะได้ $b = -|-10| = -10$

ถ้า $a = 10$ จะได้ $b = -|10| = -10$ เป็นต้น

ดังนั้น จะเลือก a ได้ 21 แบบ (a เป็นอะไรก็ได้ใน S) และ b จะถูกบังคับค่าให้สอดคล้องกับ a

จะได้จะนวนแบบที่ $|a| + b = 0$ ทั้งหมด 21 แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{21}{21^2} = \frac{1}{21}$

26. ข้อมูล 20 จำนวน เรียงจากน้อยไปมากได้เป็น $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20}$

โดยมีฐานนิยมมีค่าไม่เท่ากับ x_1 , ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ $\bar{x}$, มัธยฐานเท่ากับ m และพิสัยเท่ากับ R

ถ้าตัด x_1 ออกจะได้ข้อมูลชุดใหม่คือ $x_2, x_3, \ldots, x_{20}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ฐานนิยมของข้อมูลชุดใหม่ เท่ากับ ฐานนิยมของข้อมูลชุดเก่า

ข. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดใหม่ มากกว่าหรือเท่ากับ $\bar{x}$

ค. มัธยฐานของข้อมูลชุดใหม่ มากกว่าหรือเท่ากับ m

ง. พิสัยของข้อมูลชุดใหม่ มากกว่า R

จำนวนข้อความที่ถูกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) 2. 1 3. 2
4. 3 5. 4

<u>ตอบ</u> 4

ก. ฐานนิยม คือ ข้อมูลที่ซ้ำมากสุด

ดังนั้น การตัดข้อมูลที่ "ไม่เท่ากับฐานนิยม" ออก จะไม่มีผลกับการซ้ำมากสุดของฐานนิยมของข้อมูลตั้งต้น

เนื่องจาก x_1 ไม่เท่ากับฐานนิยม ดังนั้น หลังตัด x_1 ออก ฐานนิยมก็จะยังมีค่าเท่าเดิม $\rightarrow$ ก. ถูก

ข. $\bar{x}$ คือ ตัวกลางทาง "ค่าข้อมูล"

ดังนั้น การตัดข้อมูลที่มีค่าน้อยที่สุดออก จะทำให้ข้อมูลที่เหลือมีค่าเฉลี่ยมากขึ้น

เนื่องจาก x_1 อยู่ตัวแรกในข้อมูลที่เรียงจากน้อยไปมากแล้ว ดังนั้น x_1 เป็นข้อมูลที่น้อยกว่าหรือเท่ากับข้อมูลตัวอื่นๆ

ดังนั้น การตัด x_1 ออก จะทำให้ $\bar{x}$ มากกว่าหรือเท่ากับของเดิม $\rightarrow$ ข. ถูก

(จริงๆ จะบอกว่า "มากกว่า" ของเดิมเลยก็ได้ เพราะ x_1 จะน้อยกว่าฐานนิยม)

ค. มัธยฐาน คือ ตัวกลางทาง "ตำแหน่ง"

ดังนั้น การตัดข้อมูลที่มีตำแหน่งน้อยที่สุดออก จะทำให้ "ตำแหน่งตรงกลาง" ของข้อมูลชุดใหม่ "เลื่อนไปทางค่ามาก"

ดังนั้น การตัด x_1 ออก จะทำให้ m มากกว่าหรือเท่ากับของเดิม $\rightarrow$ ค. ถูก

ง. พิสัย $=$ ข้อมูลมากสุด $-$ ข้อมูลน้อยสุด

การตัดข้อมูลที่น้อยที่สุดออก จะทำให้ "น้อยสุดตัวใหม่" มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับของเดิม

ในขณะที่ ข้อมูลมากสุด มีค่าเหมือนเดิม $\rightarrow$ พิสัยจะมีค่าน้อยลงหรือเท่าเดิม ("เท่าเดิม" ลบ "มากขึ้น" จะได้ค่าน้อยลง)

ดังนั้น การตัด x_1 ออก จะทำให้ R น้อยกว่าหรือเท่ากับของเดิม $\rightarrow$ ง. ผิด

27. ให้ a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_{51} เป็นข้อมูลในลำดับเรขาคณิต โดยมี $a_1 = 1$ และอัตราส่วนร่วมของลำดับเท่ากับ $-\frac{5}{4}$ แล้วมัธยฐานเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\left(-\frac{5}{4}\right)^{25}$ 2. $\left(-\frac{5}{4}\right)^{23}$ 3. $-\frac{5}{4}$ 4. 1 5. $\left(\frac{5}{4}\right)^{26}$

<u>ตอบ</u> 4

เนื่องจากลำดับนี้ ยังไม่ได้เรียงจากน้อยไปมาก จึงยังเอามาหามัธยฐานทันทีไม่ได้

แทน $a_1 = 1$, $r = -\frac{5}{4}$ จะได้ลำดับนี้คือ 1 , $\left(-\frac{5}{4}\right)^1$, $\left(-\frac{5}{4}\right)^2$, $\left(-\frac{5}{4}\right)^3$, $\left(-\frac{5}{4}\right)^4$, ...

จะเห็นว่าในลำดับนี้ มีพจน์แรก $= 1$ หลังจากนั้น ลำดับจะสลับระหว่าง $\left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คี่}}$ และ $\left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คู่}}$ (เมื่อ คี่, คู่ ≥ 1)

เนื่องจากลำดับนี้มี 51 ตัว ดังนั้น ลำดับนี้จะมี 1 อยู่ 1 พจน์ , มี $\left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คี่}}$ อยู่ 25 พจน์ และมี $\left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คู่}}$ อยู่ 25 พจน์

$\left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คี่}}$ จะเป็นลบ ซึ่งจะน้อยกว่า 1

$\left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คู่}}$ จะเป็นบวก และเนื่องจาก $\frac{5}{4} > 1$ ยิ่งยกกำลังจะยิ่งมาก ดังนั้น $\left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คู่}}$ จะมากกว่า 1

$$\underbrace{\left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คี่}}, \left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คี่}}, \ldots, \left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คี่}}}_{25 \text{ พจน์ น้อยกว่า } 1}, \underbrace{1}_{\text{ตรงกลาง}}, \underbrace{\left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คู่}}, \left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คู่}}, \ldots, \left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คู่}}}_{25 \text{ พจน์ มากกว่า } 1}$$

ดังนั้น เมื่อเรียงจากน้อยไปมาก จะได้ 1 อยู่ตำแหน่งตรงกลาง จะได้ มัธยฐาน $= 1$

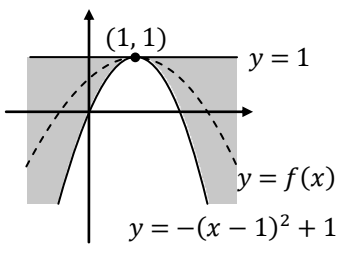
28. ถ้าสมการ $y = f(x)$ มีกราฟเป็นพาราโบลาซึ่งผ่านจุด $(0, \frac{1}{2})$ และ $-(x-1)^2 + 1 \leq f(x) \leq 1$ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง x แล้วพาราโบลา $y = f(x)$ ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-1, 0)$ 2. $(-1, -1)$ 3. $(-2, 0)$
4. $(-2, -2)$ 5. $(3, -2)$

<u>ตอบ</u> 2

$-(x-1)^2 + 1 \leq f(x) \leq 1$ แสดงว่ากราฟของ $y = f(x)$ ต้องอยู่ในช่วง $y = -(x-1)^2 + 1$ และ $y = 1$

คือ ต้องอยู่ในบริเวณที่แรเงา ดังรูป



พาราโบลาคว่ำ จุดยอด $(1, 1)$

จะเห็นว่า $y = -(x-1)^2 + 1$ และ $y = 1$ สัมผัสกันที่ $(1, 1)$ พอดี

ดังนั้น $y = f(x)$ ต้องมีจุดยอด (h, k) ที่ $(1, 1)$ ตามเส้นประในรูปเท่านั้น

แทนในสูตร $a(x-h)^2 + k$ จะได้ $f(x) = a(x-1)^2 + 1$

$y = f(x)$ ผ่านจุด $(0, \frac{1}{2})$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2} = a(0-1)^2 + 1$

$-\frac{1}{2} = a$

จะได้ $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+1$ → ดูว่าตัวเลือกไหนแทนแล้วจริง

แทน $x=-1$ จะได้ $y=-\frac{1}{2}(-1-1)^2+1=-1$ → 1. ผิด 2. ถูก → ตอบ 2

แทน $x=-2$ จะได้ $y=-\frac{1}{2}(-2-1)^2+1=-\frac{7}{2}$ → 3. ผิด 4. ผิด

แทน $x=3$ จะได้ $y=-\frac{1}{2}(3-1)^2+1=-1$ → 5. ผิด

29. ให้ $S=\{-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5\}$

$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ และ $M=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\middle|\, a,b,c,d\in S\right\}$

ถ้าสุ่มหยิบ 1 เมทริกซ์จากเซต M แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ B ซึ่ง $\det(A+B)=\det A+\det B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{100}$ 2. $\frac{3}{100}$ 3. $\frac{1}{20}$ 4. $\frac{1}{10}$ 5. $\frac{11}{100}$

<u>ตอบ</u> 4

จำนวนแบบทั้งหมด : นับดูจะเห็นว่า S มีสมาชิก 10 จำนวน (ไม่มี 0) ดังนั้น a,b,c,d เลือกได้ตัวละ 10 แบบ

จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $=10^4$ แบบ

จำนวนแบบที่สนใจ : ให้ $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ จะได้ $\det(A+B)=\det A+\det B$

$$\det\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}a&b+1\\c-1&d\end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

$$ad-(b+1)(c-1)=(0)(0)-(-1)(1)+ad-bc$$

$$ad-bc+b-c+1=1+ad-bc$$

$$b=c$$

ดังนั้น a,b,d เป็นอะไรก็ได้ (เลือกได้ตัวละ 10 แบบ) แต่ c ต้องเหมือนกับ b (เลือกไม่ได้) → เลือกได้ 10^3 แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $=\frac{10^3}{10^4}=\frac{1}{10}$

30. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี $a_1=\frac{\pi}{12}$ และ $d=\frac{\pi}{3}$

แล้ว $\sum_{n=1}^{65}\sin(a_n)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\sqrt{2}$ 2. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. 0 4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 5. $\sqrt{2}$

<u>ตอบ</u> 4

จาก $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$\sin\theta+\sin(\pi+\theta)=0$ จะได้ว่า ถ้ามุมห่างกัน π แล้ว ผลรวมค่า sin จะเป็น 0

โจทย์ให้ $d=\frac{\pi}{3}$ แปลว่า พจน์ถัดไปเพิ่มทีละ $\frac{\pi}{3}$ → ถ้าถัดไป 3 พจน์ จะเพิ่ม $=3d=3\cdot\frac{\pi}{3}=\pi$

เช่น a_4 อยู่ถัดจาก a_1 ไป 3 พจน์ → ค่าเพิ่ม $=\pi$ → $\sin a_1+\sin a_4=0$ ...(1)

a_5 อยู่ถัดจาก a_2 ไป 3 พจน์ → ค่าเพิ่ม $=\pi$ → $\sin a_2+\sin a_5=0$ ...(2)

a_6 อยู่ถัดจาก a_3 ไป 3 พจน์ → ค่าเพิ่ม $=\pi$ → $\sin a_3+\sin a_6=0$ ...(3)

$(1)+(2)+(3)$ จะได้ ผลบวก sin ของ 6 พจน์แรก $=0$

ทำแบบเดียวกันกับ 6 พจน์ถัดไป (a_7 คู่กับ a_{10}, a_8 คู่กับ a_{11}, a_9 คู่กับ a_{12}) ก็จะได้ผลบวก $=0$ ด้วย

นั่นคือ 6 พจน์ ที่อยู่ติดกัน จะมีผลบวกค่า sin เป็น 0 เสมอ

โจทย์ถามผลบวก sin ของ 65 พจน์แรก → แบ่งเป็น กลุ่มละ 6 พจน์ ไม่ลงตัว

จะหาผลบวก sin ของ 66 พจน์แรก แทน (ให้แบ่งกลุ่มละ 6 พจน์ลงตัว) แล้วค่อยหัก $\sin(a_{66})$ ที่เกินมาออกไป

เนื่องจาก 66 พจน์แรก แบ่งเป็นกลุ่มละ 6 พจน์ได้พอดี และทุกกลุ่มมีผลบวก sin เป็น 0

ดังนั้น ผลบวก sin ของ 66 พจน์แรก $= 0$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

และ $\sin(a_{66}) = \sin(a_1 + (66-1)d)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{12} + 65 \cdot \frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi + 260\pi}{12}\right)$

$= \sin\frac{261\pi}{12}$

$= \sin\frac{87\pi}{4}$

$= \sin\left(22\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$= -\sin\frac{\pi}{4}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

จะได้ ผลบวก sin ของ 65 พจน์แรก $=$ ผลบวก sin ของ 66 พจน์แรก $- \sin(a_{66})$

$= 0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

เครดิต

ขอบคุณ ข้อสอบ และเฉลยละเอียด จาก อ.ปิ๋ง GTRmath

ขอบคุณ เฉลยละเอียดจาก คุณ คณิต มงคลพิทักษ์สุข (นวย) ผู้เขียน Math E-book

ขอบคุณ คุณ Chonlakorn Chiewpanich

และ คุณ คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490
ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร